



© 2021 Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland  
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

610811

Zu den Schülern Elias, Jonas und Leon macht ihr Mathematiklehrer folgende Aussagen, von denen genau eine falsch ist und die anderen wahr sind.

- (1) Jonas ist älter als Leon.
  - (2) Leon ist älter als Elias.
  - (3) Elias ist älter als Jonas.
  - (4) Leon und Elias sind zusammen doppelt so alt wie Jonas.
- a) Welche der vier Aussagen ist falsch?
  - b) Welcher Junge ist am ältesten?

610812

Um 17 Uhr zündet Elise gleichzeitig drei Kerzen an. Sie sind alle drei gleich hoch, aber unterschiedlich dick. Jede Kerze brennt gleichmäßig ab. Um vollständig abzubrennen, braucht die erste Kerze 10 Stunden, die zweite Kerze 8 Stunden und die dritte Kerze 12 Stunden.

Als Elise alle drei Kerzen ausbläst, ist die erste noch genau doppelt so hoch wie die zweite.

- a) Zu welcher Uhrzeit bläst Elise die drei Kerzen aus?
- b) Ermittle, wie hoch dann die zweite Kerze im Verhältnis zur dritten ist.

*Auf der nächsten Seite geht es weiter!*

610813

Beweise, dass für jedes Dreieck  $ABC$  und für jede Gerade  $g$  die folgenden Aussagen gelten:

- a) Wenn die Gerade  $g$  durch den Mittelpunkt  $B'$  der Seite  $\overline{AC}$  verläuft und parallel zur Geraden  $AB$  ist, dann schneidet die Gerade  $g$  die Seite  $\overline{BC}$  in deren Mittelpunkt  $A'$ .
- b) Wenn die Gerade  $g$  durch den Mittelpunkt  $B'$  der Seite  $\overline{AC}$  und den Mittelpunkt  $A'$  der Seite  $\overline{BC}$  verläuft, dann ist die Gerade  $g$  parallel zur Geraden  $AB$ .
- c) Die Verbindungsstrecke  $\overline{A'B'}$  des Mittelpunkts  $A'$  der Seite  $\overline{BC}$  und des Mittelpunkts  $B'$  der Seite  $\overline{AC}$  ist halb so lang wie die Dreieckseite  $\overline{AB}$ .

*Hinweise:*

1. Die Beweise sollten unter Nutzung von Kongruenzsätzen, Eigenschaften von Parallelogrammen, Sätzen zu Winkeln an geschnittenen Parallelen, aber ohne Anwendung von Strahlensätzen erfolgen, da die obigen Aussagen Grundlagen für elementargeometrische Beweise der Strahlensätze sind.
2. Eine Strecke, die die Mittelpunkte zweier Seiten eines Dreiecks verbindet, heißt auch Mittellinie dieses Dreiecks. Die in b) und c) zu zeigenden Aussagen sind zusammengefasst der Satz über die Mittellinien im Dreieck:

*In jedem Dreieck ist die Mittellinie zweier Seiten parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.*

610814

Unter einer Lösung der Gleichung  $L + E + V + E + L = 61$  verstehen wir natürliche Zahlen  $L$ ,  $E$  und  $V$  größer als 0, für die diese Gleichung gilt.

Ermittle die Anzahl aller Lösungen dieser Gleichung, bei denen keine zwei der drei Zahlen  $L$ ,  $E$  und  $V$  gleich sind.