Exponentielles Wachstum und Zerfall

Angenommen, man möchte ein Modell des Wachstums oder Zerfalls einer Population erarbeiten, dann ist ein Gedanke naheliegend:

die ***Wachstumsrate*** $\frac{dy}{dt}$ ***ist proportional zur Anzahl der vorhandenen Individuen*** y .

Das läßt sich durch die nachfolgende Differentialgleichung ausdrücken :

$$\frac{dy}{dt} = k \quad y \quad .$$

Mit den Umformungen :

$$\frac{1}{dt\,y}\frac{dy}{} = \frac{d\ln(y)}{dt} = \frac{d\,k\,t}{dt} \quad \Rightarrow \ln(y) = k\,t + C \quad .$$

und wegen :

$$y = e^{\ln(y)} = e^{(k\,t + C)} = e^{(k\,t)}\,e^{C}$$

und mit der Setzung $A = e^{C}$ erhält man:

$$\mathrm{y}(t) = A\,e^{kt} \quad .$$

Zur Erinnerung: $\mathrm{y}(0) = A$.

Zusammenfassend wird das Wachstum beschrieben durch:

$$\mathrm{y}(t) = \mathrm{y}(0)\,e^{kt}$$

Beispiel 1

Eine Bakterienkultur beginnt mit 500 Bakterien und nach 3 Stunden sind es 8000 Bakterien (wir nehmen exponentielles Wachstum an).

a) Finde einen Ausdruck für die Anzahl von Bakterien nach t Stunden.

b) Finde die Anzahl von Bakterien nach 4 Stunden.

c) Wann wird die Population 30000 Bakterien erreicht haben?

d) Zeichne die Funktion aus (a)

e) Ermittle aus der Zeichnung (d) was mit der Population mit größer werdender Zeit passiert?

Wir wissen : $8000 = 500\,e^{(3\,k)}$ und müssen k finden.

Mit: $\frac{80}{5} = e^{(3\,k)}$ und $\ln\left(\frac{80}{5}\right) = 3\,k$ ergibt sich $k = \frac{\ln\left(\frac{80}{5}\right)}{3}$.

> **k:= ln(80/5)/3;**

$$k := \frac{1}{3}\ln(16)$$

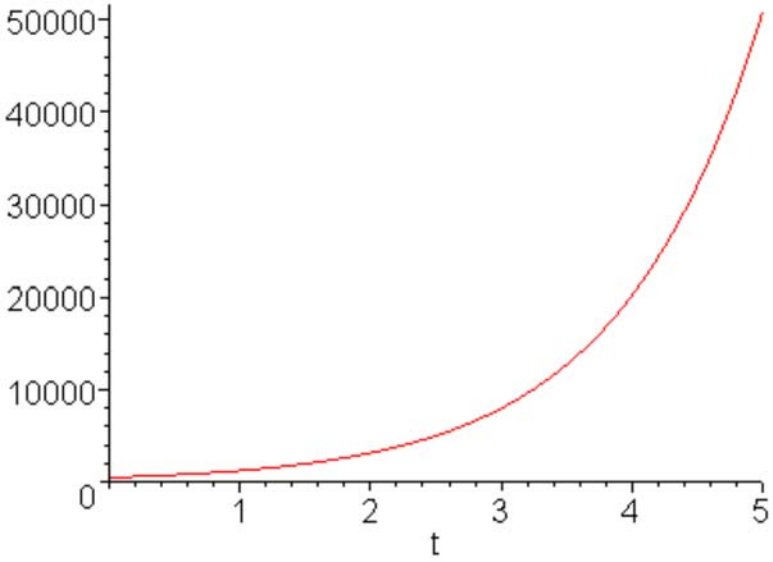
> **evalf(%);**

.9241962406

> **f1:= t -> 500 * exp(.9241962406 *t);**

$$f1 := t \to 500\ \mathbf{e}^{(.9241962406\,t)}$$

> **plot(f1(t), t = 0..5, color = red);**



> **f1(4);**

20158.73678

(b) Population nach 4 Stunden ist: 20158.73678

> **fsolve(500 * exp(.9241962406 *t)= 30000,t);**

4.430167947

(c) Mit Maples Lösungsfähigkeiten - fsolve - können wir t mit 4.430167947

für das Erreichen von 30000 Individuen berechnen. Ohne diese Funktion:

30000 = $500\,e^{kt}$ => $e^{kt} = 60$ => $\frac{\ln(60)}{k} = t$.

Also zur Zeit $\frac{\ln(60)}{k} = t$ gibt es 30000 Individuen

Da k = .9241962406 ist, können wir weiterrechnen:

> **evalf(ln(60)/ .9241962406);**

4.430167948

(e) Mit wachsender Zeit wächst die Population ins Unendliche.

Beispiel 2

Polonium-214 hat eine Habwertszeit von 1.4 x $10^{(-4)}$ Sekunden.

a) Wenn eine Probe anfangs 50g Masse hat, welche Masse hat sie dann nach t Sekunden ? Bestimme die Funktionsgleichung.

b) Wie lange muss man warten, bis die Probe auf 40g zerfallen ist?

c) Warum ist der MaplePlot zu a) leer?

Mit den bekannten Werten folgt:

25 = $50\,e^{(.14e\text{-}3\,k)}$ => 0 $.5 = e^{(.14e\text{-}3\,k)}$ => ln(0.5) = 0.00014k.

also $k = \frac{\ln(.5)}{.14e\text{-}3}$.

```
> k:= ln(.5)/(.00014);
```

$k := -4951.051290$

a) die gesuchte Gleichung ist: y = $50\,\mathbf{e}^{(-4951.051290\,t)}$

b) gefragt ist: 40 = $50\,\mathbf{e}^{(-4951.051290\,t)}$, also t = ln(4/5) / (-4951.051290).

```
> evalf(ln(4/5) / (-4951.051290));
```

.00004506993328

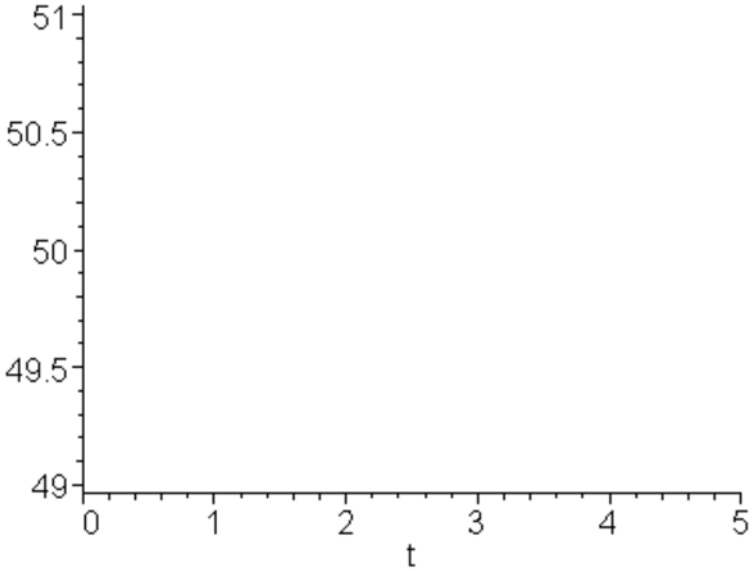
Damit beträgt die Zeit t=0 .4506993328e-4 Sekunden,

um die Probe auf 40 g zerfallen zu lassen

```
> f2:= t -> 50 * e^(-4951.051290 * t);
```

$f2 := t \rightarrow 50\,e^{(-4951.051290\,t)}$

```
> plot(f2(t), t = 0..5);
```



> **evalf(e^(-4951.051290));**

$$\frac{1}{e^{4951.051290}}$$

Da der Graph der Funktion sehr schnell fällt, ist mit der gewählten Einheit nichts zu sehen.

Beispiel 3
Die Radiokarbon- oder C-14-Methode

Im September 1991 wurde in den Ötztaler-Alpen (Österreich) eine mumifizierte Leiche entdeckt. Über diesen Fund, der von grosser geschichtlicher Bedeutung ist, wurde auch in der Presse viel berichtet. Liebevoll wurde die Mumie "Ötzi" genannt. Das Hauptinteresse galt natürlich dem Alter des Leichnams, denn bis dahin wurde angenommen, dass die Eisregionen der Alpen in der Vergangenheit von den Menschen gemieden wurden.

Der "Ötzi" aus dem Tirol

Um das Alter der Mumie zu bestimmen, verwendet man die sogenannte C-14-Methode. Worauf die C-14-Methode beruht, wird im folgenden beschieben.

Produktion und Verteilung von C-14

Sogenannte kosmische Strahlung trifft ständig auf die Erdatmosphäre.
In der oberen Atmosphäre werden durch diese Strahlung freie
Neutronen erzeugt. Diese Neutronen gehen in der unteren Atmosphäre
folgende Reaktion ein:

N-14 + n ---> C-14 + p

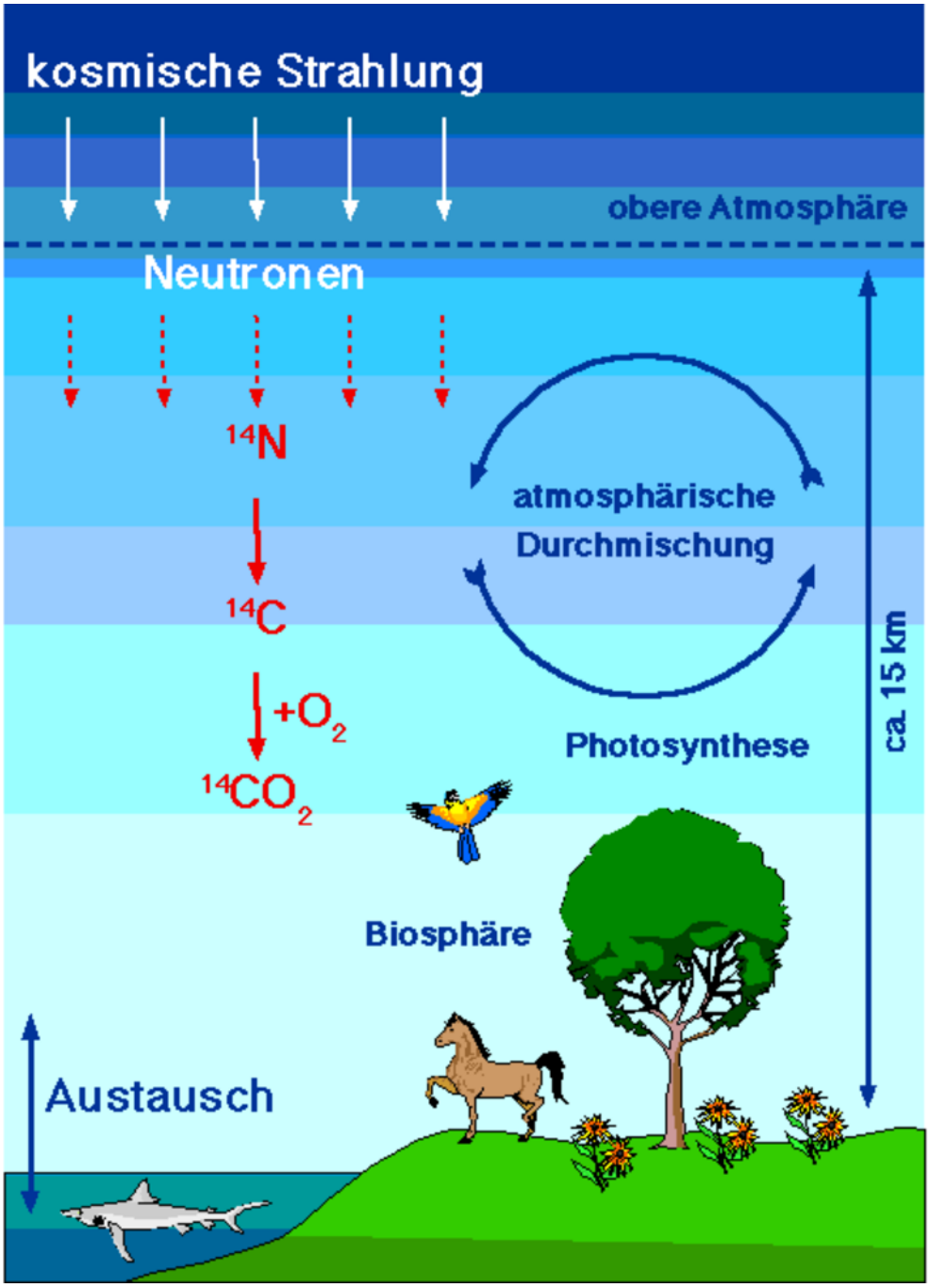
Ein Stickstoffatom (Anteil in der Luft 80 %) wird also zu einem
C-14 umgewandelt. Das freiwerdende Proton ist nicht weiter von Bedeutung.
Der Unterschied zwischen C-14, C-13 und C-12 liegt ja nur in der
Anzahl Neutronen im Kern. Es handelt sich um einen *kernphysikalischen* Unterschied.
Chemische Eigenschaften hingegen sind ausschliesslich durch die Atomhülle
(Elektronenschalen) bestimmt.
Somit ist es klar, dass sich C-14 chemisch genau gleich verhält wie C-12.
C-14 oxidiert also genauso zu CO2 wie C-12. Das CO2 verweilt
im Mittel ca. 70 Jahre in der Atmosphäre, sodass sich das C-14-haltige CO2
weltweit mit dem normalen CO2 vermischt. Die laufende Produktion und der
Zerfall von C-14-Isotopen führen im atmosphärischen Kohlendioxid-Reservoir
zu einem Gleichgewicht zwischen stabilen und radioaktiven Kohlenstoffisotopen.

Über die Photosynthese gelangt der radioaktive Kohlenstoff wie der
stabile Kohlenstoff in alle Pflanzen und über die Nahrungskette in alle
Lebewesen. Man findet also (dank den Austauschmechanismen zwischen
der Biosphäre und dem atmosphärischen CO2-Reservoir) in allen lebenden
Organismen das gleiche Häufigkeitsverhältnis von C-14 zu C-12 wie
in der Atmosphäre .
Dieses Häufigkeitsverhältnis (Anzahl C-14 Atome/Anzahl C-12 Atome)
wird kurz auch Verhältnis von C-14 zu C-12 oder C-14-Konzentration genannt.
Die atmosphärische C-14-Konzentration kann für den **Zeitraum der
Menschheitsgeschichte als nahezu konstant betrachtet werden** und beträgt
ca. 1.2.10-12. Das heisst, dass auf eine Billion C-12 Atome etwas mehr als ein
C-14 Atom anfällt.

Mit dem Tod scheidet ein Lebewesen aus dem globalen CO2-Kreislauf aus.
Von nun an nimmt das Verhältnis zwischen C-14 und C-12 ab, da
C-14 mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren zerfällt.

Durch Messung der aktuellen C-14-Konzentration in einer Probe
(z.B. organisches Material vom Ötzi) kann somit die Zeitspanne bestimmt
werden, die seit dem Ausscheiden des Organismus aus dem CO2-Kreislauf vergangen ist.

Die Zusammenhänge auf einen Blick:



Nun das Beispiel:

Es wurde ein Pergamentstück gefunden, das 74% mehr C-14 Radioaktivität aufweist als pflanzliches Material auf der Erde heutzutage.

Bestimme das Alter des Pergamentstücks.

$$y(t) = y(0)\, e^{kt}$$

Mit dem Ansatz: .
und der bekannten Halbwertszeit ergibt sich:

$$\frac{1}{2} = e^{(5730\,k)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{5730} = k \quad \text{, also}$$

$.74 = e^{kt}$ => t = $\frac{\ln(.74)}{k}$, das Alter also : $\frac{\ln(.74)}{k}$.

Maple berechnet den Wert mit :

```
> evalf( ln(.74) / ( ln(.5)/5730 ) );
```

2489.128182

Also ist das Pergamentstück ungefähr 2489 Jahre alt.

Beispiel 4

- Daten aus dem amerikanischen Umfeld -

Newtons Gesetz der Abkühlung geht besagt : Die Abkühlung eines Objekts ist proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Objekt und Umgebung .
Ein gebratener Truthahn wird vom Herd genommen, wenn er 185 F heiß ist und wird auf einen Tisch gelegt, der in einem Raum mit 75 F steht.

a) Wenn die Temperatur des Truthahns nach einer hlaben Stunde auf 150 F gefallen ist, welche Teperatur hat er dann nach 45 Minuten ?

b) Wann ist der Truthahn auf 100 F abgekühlt ?

c) Gib die Funktionsgleichung für die Abkühlung an.

d) Zeichne die Funktion zu c).

Wenn y(t) die Temperatur des Truthahns nach t Minuten ist, dann

folgt nach Newtons Gesetz: $\frac{dy}{dt} = k\,(\mathrm{y}(t) - 75)$.

oder auch :

$\frac{d\,(\mathrm{y}(t) - 75)}{dt} = k\,(\mathrm{y}(t) - 75)$ mit der Lösung $\mathrm{y}(t) - 75 = (\mathrm{y}(0) - 75)\,e^{kt}$.

also im speziellen Fall: $\mathrm{y}(t) = 75 + (185 - 75)\,e^{kt}$

Nach 30 Minuten also : y(30) = 150 = $75 + 110\,e^{(k\,30)}$ => l $\frac{\ln\left(\frac{75}{110}\right)}{30} = k$.

Damit läßt sich nun die Funktion zur Abkühlung angeben:

$y(t) = 75 + e^{kt}$, mit $k = \frac{\ln\left(\frac{75}{110}\right)}{30}$.

> **evalf(ln(75/110)/30);**

-.01276640841

(a) Nach 45 Minuten berechnet man y(45).

> **y:= t -> 75 + 110 * exp(-.01276640841 * t);**

$y := t \to 75 + 110\ \mathbf{e}^{(-.01276640841\ t)}$

> **y(45);**

136.9292118

der Truthahn ist nach 45 Minuten auf etwa 137 F abgekühlt.

(b) Wann ist der Truthahn auf 100 F abgekühlt, also y(t) = 100.

> **fsolve(75 + 110 * exp(-.01276640841 * t) = 100, t);**

116.0549227

Diese numerische Lösung zeigt:
es dauert etwa 1 Stunde und 56 Minuten zur Abkühlung auf 100 F.
Ohne Numerik :

$100 = 75 + 110\, e^{kt} \quad => \quad \frac{25}{110} = e^{kt} \quad => \quad \frac{\ln\left(\frac{25}{110}\right)}{k} = t$.

Also dauert es $\frac{\ln\left(\frac{25}{110}\right)}{k}$ Minuten, um den Truthahn auf 100 F abzukühlen,

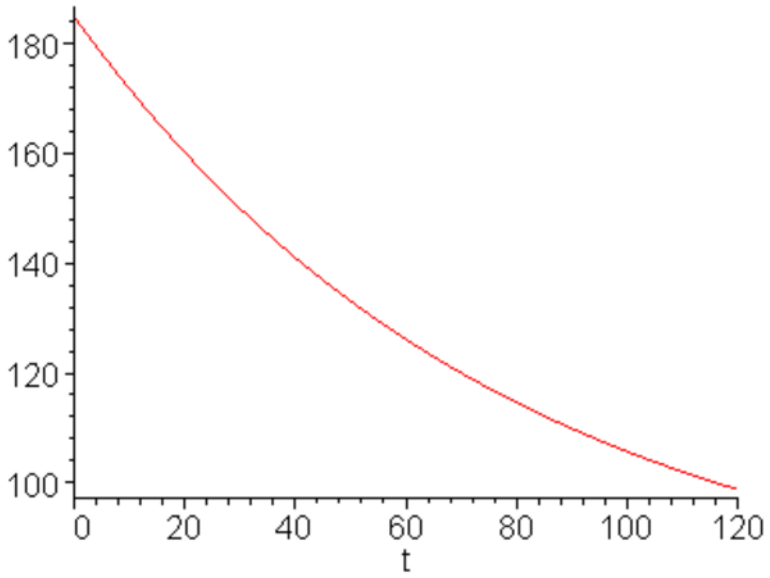
dabei ist $\frac{\ln\left(\frac{75}{110}\right)}{30} = k$

> **evalf(ln(25/110) / (ln(75/110) / 30));**

116.0549227

Die Ergebnisse stimmen überein, wen wundert es.

> **plot(y(t),t = 0..120, color = red);**


180
160
140
120
100
0
20
40
60
80
100
120
t