

## Definition der Ableitung einer Funktion

In diesem Arbeitsblatt wird die Lösung zweier Probleme beschrieben:

1. das mathematische Problem, die Tangente an den Graphen eine Funktion  $f$  zu finden
2. das physikalische Problem, die Geschwindigkeit eines sich bewegenden Objekts zu bestimmen

zum 1. Problem

> **restart;**

Gegeben sei eine Funktion  $f$  und eine Stelle  $x_0$  des Definitionsbereichs von  $f$ .

Wie kann man die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  finden ?

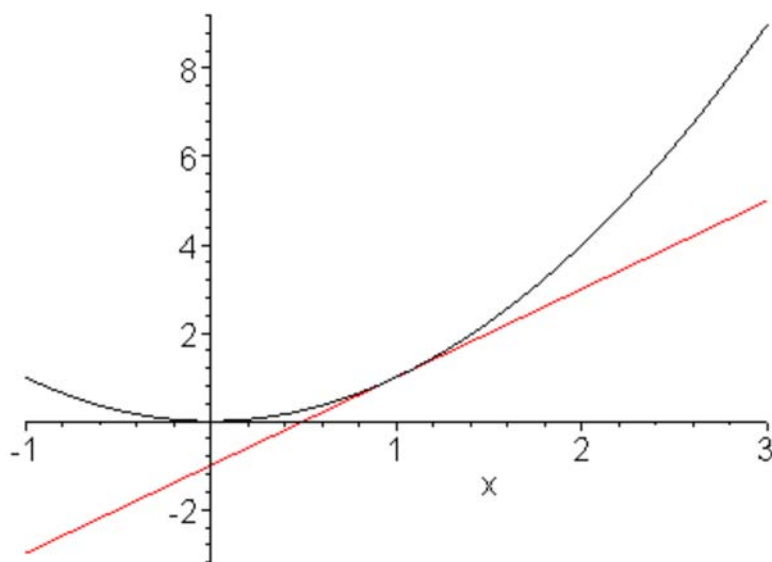
Das nachfolgende Bild zeigt den Kern des Problems.

> **f := x -> x^2;**

**f1 := D(f);**

**t := x -> f(1) + f1(1)\*(x - 1);**

> **plot([f(x),t(x)], x=-1..3, colour=[black,red]);**



Schwarz sieht man die Funktion  $f$ , mit  $f(x) = x^2$ , und die rote Gerade

ist die Tangente an den Graphen von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 1$ .

Jedenfalls entspricht dieses Bild unserer Vorstellung von Tangente.

Klar ist, die Gleichung dieser Tangente ist zu finden und man ist schon fast fertig, wenn man die Steigung der Tangente kennt.

Zur Lösung des Problems betrachtet man einfach eine Sekante, in dem man einen 2. Punkt auf dem Graphen zu  $f$  und die Gerade durch die beiden Punkte betrachtet, denn die Steigung der Sekante lässt sich nach den

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Kenntnissen aus der Klasse 8 noch berechnen :

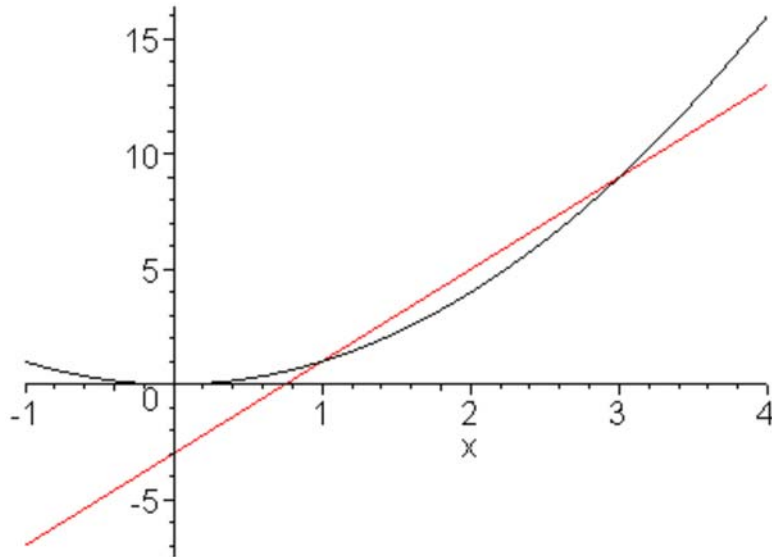
> **m := (f(3) - f(1))/(3 - 1);**

$m := 4$

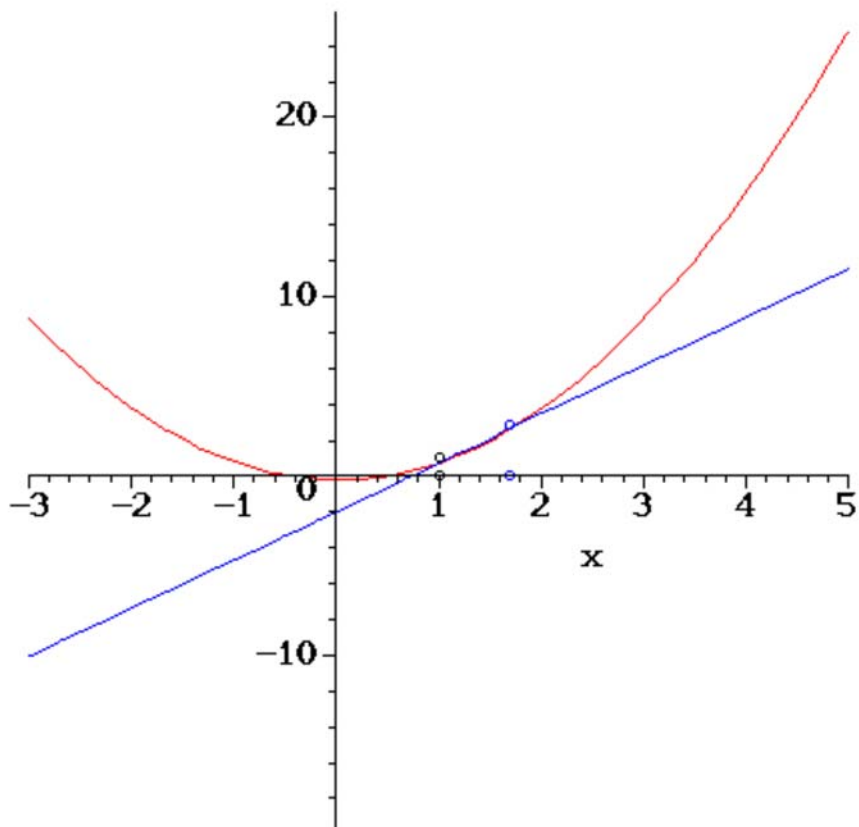
$s := x \rightarrow f(1) + m \cdot (x - 1);$

$s := x \rightarrow f(1) + m \cdot (x - 1)$

$\text{plot}([f(x), s(x)], x=-1..4, \text{colour}=[\text{black}, \text{red}]);$



Was passiert, wenn man nun den 2. Punkt zum 1. Punkt entlang des Graphen zu  $f$  wandern lässt ?  
Die Animation zeigt es ( - Die Befehle zur Animation sind weggelassen - )



Die Animation legt folgende Festlegung nahe: Die Steigung der Tangente ist der **Grenzwert** der Steigung der Sekanten, symbolisch notiert :

Die Steigung der Tangente im Punkt  $(x_0, f(x_0))$  :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{oder}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad , \text{ zwei Schreibweisen für die gleiche Idee.}$$

> **restart;**

Betrachten wir nun ein Objekt, das sich entlang der x-Achse bewegt, so dass man zu jedem Zeitpunkt t die Position durch den Ausdruck  $s(t)$  bestimmen kann,

beispielsweise  $s(t) = t^2$  oder  $s(t) = \sin(t)$  .

Was die *Durchschnittsgeschwindigkeit des Objekts* ( $av$ ) in einem Zeitintervall  $[t_0, t_1]$  ist,

läßt sich wohl mit Hilfe der üblichen *Formel* : **Strecke durch Zeit** bestimmen,

denn im Zeitraum  $[t_0, t_1]$  hat das Objekt die Strecke  $s(t_1) - s(t_0)$  zurückgelegt,

$$\text{also } av [t_0, t_1] = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Mit der nachfolgenden Procedure läßt sich die **Durchschnittsgeschwindigkeit** bestimmen:

> **av := proc(s,t0,t1) evalf((s(t1) - s(t0))/(t1 - t0)) end proc;**

Für eine Wegfunktion der Form  $s(t) = t^2$  also :

> **s := t-> t^2;**

$s := t \rightarrow t^2$

> **av(s,1,5);**

6.

Läßt man das Zeitintervall immer kleiner werden, so ergeben sich z.B. folgende Werte:

> **av(s,1,2); av(s,1,1.5); av(s,1,1.1); av(s,1,1.01);**

3.

2.500000000

2.100000000

2.010000000

aber natürlich geht nicht:  $t_1 = t_0$  :

> **av(s,1,1);**

Error, (in av) division by zero

Man kann aber sehen, dass die Durchschnittsgeschwindigkeiten einen **Grenzwert** haben, wenn sich  $t_1$  gegen  $t_0$  bewegt, damit macht es Sinn,

die **Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t_0$**  als diesen Grenzwert zu definieren:

$$\text{Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt } t_0 : v(t_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

oder alternativ :

$$\text{Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt } t_0 : v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} .$$

