

Abstand windschiefer Geraden im $\mathbb{R}^3$

Nicht ganz so einfach wie bei einem gegebenen Punkt den Abstand von einer Geraden zu bestimmen oder auch den Abstand zweier paralleler Geraden zu berechnen ist es, wenn die beiden Geraden windschief sind.

Seien $g: \vec{x} = \vec{x}_{0g} + \lambda_g \vec{u}_g$ und $h: \vec{x} = \vec{x}_{0h} + \lambda_h \vec{u}_h$ windschief.

Um den Abstand von g und h zu berechnen, müssen wir im Prinzip natürlich auch wieder den Abstand eines Punktes auf h von der Geraden g (oder umgekehrt) bestimmen. Im Gegensatz zu parallelen Geraden können wir uns diesen Punkt auf der Geraden h aber nicht frei auswählen. Es gibt auf jeder der beiden windschiefen Geraden genau einen Punkt, der von dem jeweils anderen Punkt auf der zweiten Geraden minimalen Abstand hat. Wir bezeichnen den entsprechenden Punkt auf g mit L_g und den entsprechenden Punkt auf h mit L_h . Wir stellen uns jetzt einfach vor, wir hätten die Punkte L_g bzw. L_h bereits berechnet.

Wie schon bei der Bestimmung des Abstands eines Punktes von einer Geraden, muss dann der Vektor $\overrightarrow{L_g L_h}$ senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden g stehen,

$$\text{d.h. } \overrightarrow{L_g L_h} \bullet \vec{u}_g = 0.$$

Ebenso muss er aber auch senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden h stehen,

$$\text{d.h. } \overrightarrow{L_g L_h} \bullet \vec{u}_h = 0$$

Weil L_g ein Punkt der Geraden g ist und L_h ein Punkt der Geraden h ist, muss es Werte für λ_g und λ_h geben derart, dass für die Ortsvektoren von L_g bzw. L_h gilt:

$$\vec{l}_g = \vec{x}_{0g} + \lambda_g \vec{u}_g \quad \text{und} \quad \vec{l}_h = \vec{x}_{0h} + \lambda_h \vec{u}_h$$

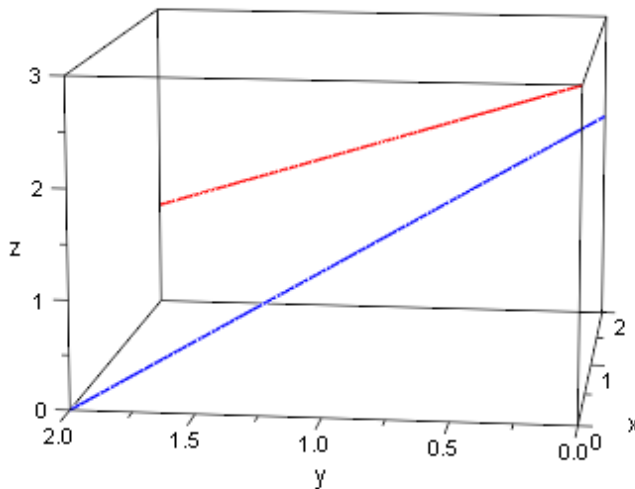
Lässt sich das Problem nun lösen?

Die Antwort ist: Ja, denn die Komponenten von $\overrightarrow{L_g L_h} = \vec{l}_h - \vec{l}_g$ hängen zwar jetzt von zwei Parametern ab (nämlich von λ_g und λ_h), aber wir haben auch zwei Bedingungen. Diese beiden Bedingungen liefern uns ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten, das, sofern die beiden Geraden in der Tat windschief sind, auch immer eine eindeutige Lösung besitzt. Ist das Gleichungssystem gelöst, so müssen wir die Werte für λ_g und λ_h nur noch in die Parameterformen der Geraden g bzw. h einsetzen und erhalten so die Ortsvektoren der Punkte L_g und L_h . Der Abstand von g und h ist dann entsprechend durch die Länge des Vektors $\overrightarrow{L_g L_h}$ gegeben.

Schauen wir uns ein konkretes Beispiel an: Die beiden Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_g \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_h \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind windschief (nachweisen als Übung). Wir zeichnen beide Geraden zunächst in ein gemeinsames Koordinatensystem:



Da die Lotfußpunkte L_g und L_h , die wir nun finden müssen, nach unseren obigen Ausführungen Punkte der Geraden g bzw. h sind, gilt für die Ortsvektoren:

$$\vec{l}_g = \begin{pmatrix} \lambda_g + 1 \\ 1 - \lambda_g \\ \lambda_g + 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{l}_h = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_h \\ 1 - \lambda_h \\ \lambda_h + 2 \end{pmatrix}$$

Die Orthogonalität des Vektors $\overrightarrow{L_g L_h} = \vec{l}_h - \vec{l}_g$ zu den beiden Richtungsvektoren der Geraden führt auf die beiden linearen Gleichungen:

$$\lambda_g - 3\lambda_h + 1 = 0$$

$$3\lambda_g - \lambda_h + 1 = 0$$

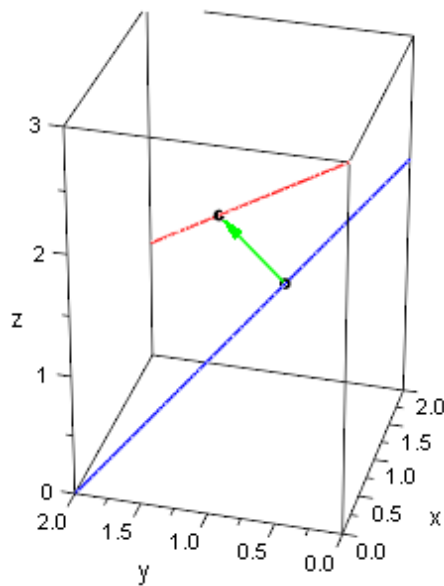
Wir lösen das Gleichungssystem:

$$\lambda_g = \frac{1}{4}, \lambda_h = -\frac{1}{4}$$

Jetzt müssen wir nur noch diese Werte in die Parameterform der Geraden g bzw. h einsetzen und erhalten so die Ortsvektoren der Punkte L_g bzw. L_h :

$$\vec{l}_g = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{l}_h = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Zeichnen wir die Punkt L_g und L_h sowie den Vektor $\overrightarrow{L_g L_h}$ zusammen mit den beiden Geraden g und h in ein gemeinsames Koordinatensystem, so ergibt sich:



Der Abstand von g und h entspricht jetzt also der Länge des Vektors $\overrightarrow{L_g L_h}$ (oben in grüner Farbe eingezeichnet): $d(g, h) = d(L_g, L_h) = \frac{\sqrt{2}}{2}$